Sèrie 1

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Criteris generals per a la correcció:

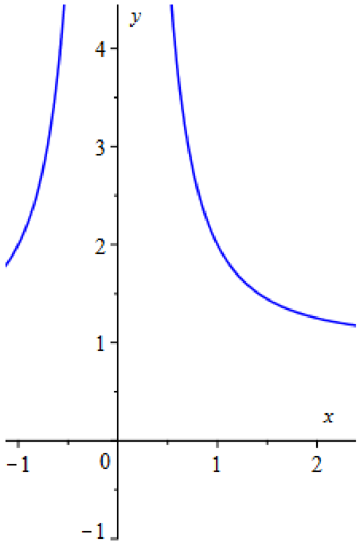
1. En tots els casos la resolució que fa l'estudiant s'ha de poder seguir i comprendre els passos que fa. **Aquelles respostes, parcials o totals, que no estiguin desenvolupades o no es pugui seguir el com s'ha arribat a donar la resolució seran puntuades amb 0 punts.**
2. La resolució proposada és, en alguns casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, **sempre que l'enunciat ho permeti, en el cas que l'estudiant respongui amb una resolució alternativa totalment correcta se li assignarà el total de puntuació de l'apartat.** Si la resposta és parcial la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.
3. En alguns casos, la solució final pot admetre **expressions equivalents**. En aquests casos la puntuació serà la totalitat de la puntuació de l'apartat.
4. Tots els exercicis, apartats i passos dins d'un apartat es valoraran amb múltiples de 0,25 punts.
5. **Penalització per errades de càlcul o transcripció:**

- Si l'errada que es comet no té més transcendència, aleshores NO es descomptarà res de la puntuació parcial de l'apartat.
- En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valorarà i puntuarà el desenvolupament i coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà una penalització final de 0,25 punts.
- En cas que l'errada condueixi a no tenir sentit alguna de les qüestions que es demanen, aleshores la puntuació màxima de l'apartat serà de 0,75 punts.
- Si la resolució d'un apartat conté dues errades la puntuació de l'apartat serà l'acumulada fins al moment previ al cometre la segona errada.

1. Tracem la recta tangent a la funció $f(x)=\frac{1}{x^2}+1$ per un punt $P=(a,f(a))$ del primer quadrant. Aquesta recta juntament amb els eixos de coordenades formen un triangle.

   a) Comproveu que l'àrea d'aquest triangle, en funció d'a,ve donada per la funció
   $$g(a)=\frac{(a^2+3)^2}{4a}.$$
   [1,25 punts]

   b) En quin punt P l'àrea del triangle és mínima? Calculeu aquest valor mínim.
   [1,25 punts]



Resolució:

a) La recta tangent a $y=f(x)$ en el punt d'abscisses $x=a$ és
$$y=f'(a)(x-a)+f(a).$$
Com que $f'(x)=\frac{-2}{x^3}$, l'equació de la recta tangent és
$$y=\frac{-2}{a^3}(x-a)+\frac{1}{a^2}+1 \rightarrow y=\frac{-2}{a^3}x+\frac{a^2+3}{a^2}.$$
Els vèrtexs del triangle seran l'origen de coordenades i els talls de la recta tangent amb els eixos, que són:

Tall amb $x=0 \rightarrow y=\frac{a^2+3}{a^2} \rightarrow \left(0,\frac{a^2+3}{a^2}\right)$

Tall amb $y=0 \rightarrow 0=\frac{-2}{a^3}x+\frac{a^2+3}{a^2} \rightarrow x=\frac{a(a^2+3)}{2} \rightarrow \left(\frac{a(a^2+3)}{2},0\right)$

Així, l'àrea del triangle serà $g(a)=\frac{1}{2}\frac{a^2+3}{a^2}\frac{a(a^2+3)}{2}=\boxed{\frac{(a^2+3)^2}{4a}}$

b) Calculem els punts singulars de la funció $g(a)$ igualant la seva derivada a zero:
$$g'(a)=\frac{2(a^2+3)\cdot 2a\cdot 4a-(a^2+3)^2\cdot 4}{(4a)^2}=\frac{4(a^2+3)(\dots)}{16a^2}=\dots=\frac{3(a^2+3)(a^2-1)}{4a^2}=0,$$

$a^2=1 \rightarrow a=\pm 1$ Prenem però només $a=1$ ja que el punt P és al primer quadrant.
Així el punt P té coordenades $(1,f(1))=\boxed{(1,2)}$.

Es comprova que l'àrea és mínima perquè el signe de la funció g' (que és el de la part (a^2-1) perquè la resta de termes són positius) canvia en $a=1$:
a l'esquerra (per exemple, x = 0,9) és negatiu (i, per tant, la funció g és decreixent),
a la dreta (per exemple, x = 1,1) és positiu, (i, per tant, la funció g és creixent).
El valor de l'àrea mínima és $g(1)=\frac{(1+3)^2}{4}=\boxed{4\ u^2}$

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts pel plantejament.
0,25 punts per l'expressió de la recta tangent.
0,25 punts pels punts de tall amb l'eix OX.
0,25 punts pels punts de tall amb l'eix OY.
0,25 punts per la funció àrea.

b) 0,5 punts per la derivada primera.
0,25 punts pel valor mínim i el punt P.
0,25 punts per comprovar que és mínim relatiu.
0,25 punts pel valor de l'àrea.

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real k:

$$\begin{cases} 5x + y + 4z = 19 \\ kx + 2y + 8z = 28 \\ 5x + y - kz = 23 + k \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k.
[1,25 punts]

b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas $k = 0$.
[1,25 punts]

Resolució:

a) Escrivim el sistema en forma matricial.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ k & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & -k & 23+k \end{array}\right)$$

Denotem per a A i A^* la matriu dels coeficients i l'ampliada, respectivament.

El determinant de la matriu A del sistema és:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ k & 2 & 8 \\ 5 & 1 & -k \end{vmatrix} = k^2 - 6k - 40$$

Si igualem el determinant a 0 obtenim:

$$k^2 - 6k - 40 = 0 \rightarrow k = \frac{6 \pm \sqrt{36+160}}{2} = \frac{6 \pm 14}{2} \Longrightarrow k = 10; k = -4$$

Aleshores, podem considerar els següents tres casos:

- Si $k \neq 10, -4 \rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema compatible determinat.
- Si $k = 10$, el sistema en forma matricial és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 10 & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & -10 & 33 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -14 & 14 \end{array}\right)$$

$\text{rang}(A) = 2;\ \text{rang}(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible.

Observació: El rang es pot justificar amb menors no nuls o bé directament es pot concloure la incompatibilitat a partir de la segona equació.

- Si $k = -4$, el sistema en forma matricial és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ -4 & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & 4 & 19 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 0 & 7 & 28 & 108 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(A^*) < \text{núm. incògnites} = 3 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminat amb 1 (=3-2) grau de llibertat (les solucions depenen d'un paràmetre lliure).

b) Per a $k = 0$, estem en el primer cas i sabem que es tracta d'un sistema compatible determinat, té solució única:

El sistema queda:

$$\begin{cases} 5x + y + 4z = 19 \\ 2y + 8z = 28 \\ 5x + y = 23 \end{cases}$$

Resolent el sistema per Gauss, o bé per Cràmer, obtenim la solució $\boxed{\begin{cases} x = 1 \\ y = 18 \\ z = -1 \end{cases}}$

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per la presentació matricial del sistema.
0,25 punts pels primers passos per arribar als valors crítics per a la discussió.
0,75 punts per la discussió dels tres casos (0,25 punts per cada cas).

b) 0,25 punts per observar que té solució única.
0,25 punts per la concreció del sistema a resoldre.
0,75 punts per la solució (0,25 punts per cada incògnita).

3.

a) Calculeu l'equació general del pla π que passa pel punt $(8,8,8)$ i té vectors directors $\boldsymbol{u} = (1,2,-3)$ i $\boldsymbol{v} = (-1,0,3)$.
[1,25 punts]

b) Determineu el valor del paràmetre a perquè el punt $(1,-5,a)$ pertanyi al pla π i calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa per aquest punt i és perpendicular al pla π.
[1,25 punts]

Resolució:

a) L'equació general del pla és:

$$\begin{vmatrix} x-8 & 1 & -1 \\ y-8 & 2 & 0 \\ z-8 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 6x + 2z = 64 \rightarrow \boxed{3x + z = 32}.$$

Observació: Naturalment, també es donarà per bona la construcció de l'equació del pla a partir del vector normal del pla calculat com el producte vectorial dels dos vectors directors, o equivalent.

b) Perquè el punt $(1,-5,a)$ sigui del pla, ha de satisfer l'equació, per tant:

$$3 + a = 32 \rightarrow \boxed{a = 29}$$

Ens demanen la recta que passa pel punt $(1,-5,29)$ i té vector director el vector normal al pla, que és $(A,B,C) = (3,0,1)$. Així l'equació paramètrica de la recta demanada és:

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -5 \\ z = 29 + t \end{cases} \text{amb } t \in \boldsymbol{R}}$$

Pautes de correcció:

a) 0,5 punts pel plantejament.
0,25 punts pel desenvolupament.
0,5 punts per la solució.

b) 0,5 punts per calcular el valor de a.
0,25 punts per les coordenades del punt.
0,25 punts pel vector director.
0,25 punts per l'equació paramètrica de la recta.

Observació: Tot i que l'apartat a) pugui estar mal resolt, l'apartat b) és puntuarà correctament encara que el pla inicial no sigui correcte sempre que el procediment i càlcul siguin els adequats.

4. Considereu la funció $f(x)=\frac{ax^2+b}{x}$ en què a i b són dos paràmetres reals. Calculeu els valors de a i b de manera que la funció $f(x)$ tingui una asímptota obliqua de pendent 1 i un mínim en el punt de la gràfica amb abscissa $x=2$
[2,5 punts]

Resolució:

Plantegem el límit per calcular el pendent de l'asímptota obliqua i l'igualem a 1:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+b}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(a+\frac{b}{x^2}\right)=\boxed{a=1}$$

Així, la funció serà $f(x)=\frac{x^2+b}{x}$.

Perquè tingui un mínim en el punt d'abscissa $x=2$, cal que la derivada s'anul·li en aquest punt:

$$f'(x)=\frac{2x^2-(x^2+b)}{x^2}=\frac{x^2-b}{x^2}\to f'(2)=\frac{4-b}{4}=0\to\boxed{b=4}.$$

Finalment, confirmem que es tracta d'un mínim en $x=2$ ja que:

$$f'(x)=\frac{x^2-4}{x^2}\begin{cases}>0 & \text{si } x<-2\to\ f \text{ creixent}\\ \leq 0 & \text{si} -2\leq x\leq 2\to\ f\text{ decreixent}\\ >0 & \text{si } x>2\to\ f\text{ creixent}\end{cases}$$

I, per tant, en el punt d'abscissa $x=2$, la funció passa de decreixent a creixent i, per tant, presenta un mínim.

Pautes de correcció:

0,5 punts pel plantejament de límit per al pendent de l'A.O.
0,5 punts pel càlcul del valor de a.
0,5 punts per la derivada.
0,5 punts pel valor de b.
0,5 punts per justificar que és un mínim.

5. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$.
   a) Trobeu la matriu X que satisfà l'equació $AX = I - 3X$ en què I és la matriu identitat d'ordre 2.
   [1,25 punts]
   b) Comproveu que la matriu X és invertible i calculeu-ne la matriu inversa.
   [1,25 punts]

Resolució:

a) La matriu incògnita X ha de ser quadrada d'ordre 2, en cas contrari no es podria operar l'equació donada. Aïllem X de la igualtat donada:

$$AX = I - 3X \rightarrow AX + 3X = I \rightarrow (A + 3I)X = I \rightarrow X = (A + 3I)^{-1}$$

Així ja podem calcular la matriu X:

$$X = (A + 3I)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}}$$

b) De la igualtat $(A + 3I)X = I$ podem deduir directament que la matriu X és invertible i que $A + 3I$ és la matriu inversa de la matriu X, així doncs:

$$X^{-1} = A + 3I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}}$$

De forma alternativa, $\det(X) = -4 - (-3) = -1 \neq 0$ i, per tant, X és invertible i la matriu inversa serà:

$$X^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^t = -\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}}$$

Pautes de correcció:

a) 0,5 punts per l'expressió matricial de X.
0,75 punts pel càlcul efectiu de la matriu X.

Observació: La resolució que consisteix a plantejar la matriu X com a 4 paràmetres a determinar i la corresponent resolució del sistema d'equacions lineals 4x4 també es donarà per bona.

b) 0,5 punts per comprovar que la matriu X és invertible.
0,75 punts pel càlcul efectiu de la matriu inversa de X.

6. Considereu la funció $f(x) = x^3$.

a) Calculeu en quin punt del tercer quadrant la recta tangent a $y = f(x)$ és paral·lela a la recta $3x - y = 4$. Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica en aquest punt i feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció i les dues rectes.
[1,25 punts]

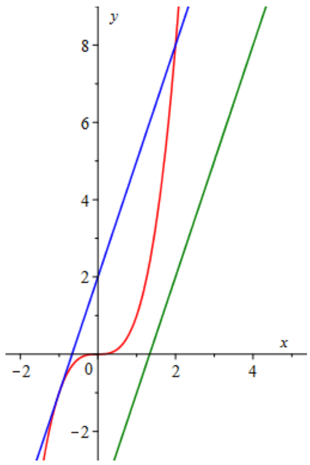
b) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per $y = f(x)$ i la recta $y = 3x + 2$.
[1,25 punts]

Resolució:

a) El pendent de la recta tangent a la funció $y = f(x)$ en el punt $\left(a, f(a)\right)$ és $f'(a)$, que ha de ser igual al pendent de la recta $y = 3x - 4$, que és 3. Per tant,

$$f'(x) = 3x^2 \rightarrow f'(a) = 3a^2 = 3 \rightarrow$$
$$\rightarrow a^2 = 1 \rightarrow a = \pm 1$$

Així, el punt buscat és $\left(-1, f(-1)\right) = \boxed{(-1,-1)}$ ja que ha de ser del tercer quadrant.



La recta tangent en aquest punt és:

$$y = f'(-1)(x+1) + f(-1) \rightarrow \boxed{y = 3x + 2}$$

b) Per a calcular l'àrea compresa entre $y = x^3$ i $y = 3x + 2$, hem de calcular els seus punts de tall:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 3x + 2 \end{cases} \rightarrow x^3 = 3x + 2 \rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0$$

Pel mètode de Ruffini es descompon el polinomi en factors primers i tenim:

$$x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2) = 0 \rightarrow x = -1 \text{ i } x = 2$$

Així, l'àrea demanada es calcula amb la integral definida:

$$\int_{-1}^{2} (3x + 2 - x^3)dx = \left[3\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{2} = \boxed{\frac{27}{4}u^2}$$

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts pel plantejament i obtenir els valors possibles de a.
0,25 punts per triar el punt correcte en el tercer quadrant.
0,25 punts per la formulació de la recta tangent.
0,25 punts per l'equació de la recta tangent.
0,25 punts per la gràfica de la funció i les dues rectes.

b) 0,25 punts pel plantejament de l'àrea.
0,25 punts per calcular els punts d'intersecció de les dues gràfiques.
0,25 punts per plantejar la integral definida.
0,25 punts pel càlcul de la primitiva.
0,25 punts pel càlcul i resultat final.
Observació: Qualsevol subdivisió correcta de l'àrea demanada també serà donada per bona.

SÈRIE 3

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,50 punts.

Podeu portar calculadora però no s'autoritzarà l'ús d'aquelles que puguin portar informació emmagatzemada o puguin transmetre-la, que siguin gràfiques o que puguin fer càlculs simbòlics.

Criteris generals per a la correcció:

6. En tots els casos la resolució que fa l'estudiant s'ha de poder seguir i comprendre els passos que fa. **Aquelles respostes, parcials o totals, que no estiguin desenvolupades o no es pugui seguir el com s'ha arribat a donar la resolució seran puntuades amb 0 punts.**
7. La resolució proposada és, en alguns casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, **sempre que l'enunciat ho permeti, en el cas que l'estudiant respongui amb una resolució alternativa totalment correcta se li assignarà el total de puntuació de l'apartat.** Si la resposta és parcial la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.
8. En alguns casos, la solució final pot admetre **expressions equivalents**. En aquests casos la puntuació serà la totalitat de la puntuació de l'apartat.
9. Tots els exercicis, apartats i passos dins d'un apartat es valoraran amb múltiples de 0,25 punts.
10. **Penalització per errades de càlcul o transcripció:**

- Si l'errada que es comet no té més trascendència, aleshores NO es descomptarà res de la puntuació parcial de l'apartat.
- En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valorarà i puntuarà el desenvolupament i coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà una penalització final de 0,25 punts.
- En cas que l'errada condueixi a no tenir sentit alguna de les qüestions que es demanen, aleshores la puntuació màxima de l'apartat serà de 0,75 punts.
- Si la resolució d'un apartat conté dues errades la puntuació de l'apartat serà l'acumulada fins al moment previ al cometre la segona errada.

1. Sigui $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

   a) Determineu el rang de la matriu A en funció del paràmetre a.
   [1,25 punts]

   b) Comproveu que $\det(A^2 + A) = 0$.
   [1,25 punts]

Resolució:

a) Discutirem el rang a partir de quan el rang pugui ser màxim (3 en aquest cas), que es correspon amb quan el determinant de la matriu és no nul. Comencem calculant $det(A)$ fent la transformació $F2 \to F2 - F1$, on F1 i F2 denoten les files 1 i 2 respectivament de la matriu A. Tenim

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = a - 1.$$

Per tant l'únic valor per al qual la matriu no té rang 3 és $a = 1$. En aquest cas veiem clarament que té rang 2 ja que $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Per tant tenim:

$a \neq 1$, aleshores $rang(A) = 3$. $a = 1$, aleshores $rang(A) = 2$.

b) Tenim

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 4 \\ 0 & 1+a & 2 \\ a & 0 & 1+a \end{pmatrix}$$

i per tant $A^2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 4 \\ 0 & 1+a & 2 \\ a & 0 & 1+a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2a & 6 \\ 1 & a & 3 \\ a & a & 2+a \end{pmatrix}$.

Veiem clarament que $\det(A^2 + A) = 0$ ja que $F1 = 2 \cdot F2$ on $F1, F2$ denoten respectivament les files 1 i 2 de la matriu $A^2 + A$.

De forma alternativa es pot calcular el determinant de la matriu i obtenim:

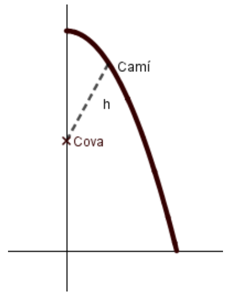
$$\begin{vmatrix} 2 & 2a & 6 \\ 1 & a & 3 \\ a & a & 2+a \end{vmatrix} = 2a(2+a) + 6a + 6a^2 - 6a^2 - 6a - 2a(2+a) = 0.$$

Pautes de correcció:

c) 0,5 punts pel plantejament (a partir del determinant o de Gauss)
   0,25 punts pel valor crític
   0,25 punts pel cas $a \neq 1$.
   0,25 punts pel cas $a = 1$.

d) 0,25 punts pel càlcul de A^2.
   0,25 punts pel càlcul de A^2+A
   0,75 punts per la comprovació del determinant igual a 0.
   Observació: es pot factoritzar l'expressió A^2+A i aplicar el determinant d'un producte. Si es fa correctament l'apartat tindrà tota la puntuació d'1 punt.

2. S'han trobat unes pintures rupestres en una cova situada en una zona molt pedregosa. Hi ha un camí que voreja parcialment la cova format per l'arc de corba $y = 4 - x^2$ d'extrems (0, 4) i (2, 0). La cova està situada en el punt de coordenades (0, 2), tal com es mostra en la figura, i es vol habilitar un accés rectilini des del camí a la cova que sigui el més curt possible.

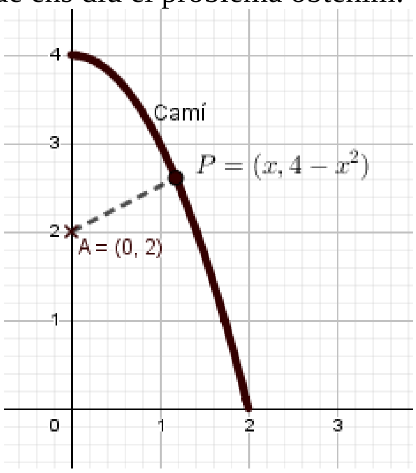


a) Identifiqueu a la gràfica de la figura les coordenades de la cova i del punt del camí des d'on es vol habilitar l'accés. Comproveu que la funció $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$ calcula la distància des de cada punt del camí a la cova.
[1,25 punts]

b) Calculeu les coordenades del punt del camí que queda més a prop de la cova i digueu quina serà la longitud de l'accés d.
[1,25 punts]

Resolució:

a) Quan posem la graella de valors que ens diu el problema obtenim:



Els punts del camí tenen coordenades $P = (x, 4 - x^2)$. La distància entre A = (0, 2) i qualsevol punt del camí és:

$$d(A,P) = \sqrt{x^2 + (4 - x^2 - 2)^2}$$
$$= \sqrt{x^2 + (2 - x^2)^2}$$
$$= \boxed{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}}$$

b) Per a resoldre aquest problema d'optimització necessitem saber els candidats a màxim i mínim, que han de ser punts en què s'anul.li la funció derivada.

Calculem f'(x).

$f'(x)=\dfrac{4x^3-6x}{2\sqrt{x^4-3x^2+4}}=\dfrac{x(2x^2-3)}{\sqrt{x^4-3x^2+4}}$ .Igualem la derivada a zero per trobar els possibles extrems de f(x).

$x(2x^2-3)=0\rightarrow x=0; x=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ del que només agafem les solucions positves.

Esbrinem ara quin són els mínims:

	$\left(0,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\left(\sqrt{\frac{3}{2}},+\infty\right)$
$f'(x)$	<0	0	>0
$f(x)$	decreixent	mínim	creixent

També es pot raonar que com que x^4-3x^2+4 és sempre positiu els mínims de f(x) estan en els mateixos punts que els mínims de $(f(x))^2=g(x)=x^4-3x^2+4$ i per tant:

$$g'(x)=4x^3-6x; g'(x)=0 \Rightarrow 2x(2x^2-3)\Rightarrow x=0 \; o \; x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

D'aquestes solucions només considerem, pel context del problema, les positives.

Comprovem quins són els màxims i quins els mínims.

$$g''(x)=12x^2-6$$

$g''(0)=-6<0\Rightarrow$ En x=0 hi ha un màxim

$g''\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=12\cdot\frac{3}{2}-6=12>0 \Rightarrow$ En $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ hi ha un mínim.

Per tant el punt del camí que minimitza la distància del camí a la cova és

$$\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\ 4-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2\right)=\left(\sqrt{\frac{3}{2}},4-\frac{3}{2}\right)=\boxed{\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{5}{2}\right)}$$

La longitud mínima del camí serà:

$$f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^4-3\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2+4}=\sqrt{\frac{9}{4}-3\frac{3}{2}+4}=\sqrt{\frac{7}{4}}=\boxed{\frac{\sqrt{7}}{2}\ u}$$

Pautes de correcció:

a) 0,5 punts per la identificació a la figura.
   0,5 punts per la primera expressió de la distància.
   0,25 punts per l'expressio final de la distància.

b) 0,25 punts per la derivada primera.
   0,25 punts per l'abscissa del punt
   0,25 punts per la comprovació de mínim.
   0,25 punts per les coordenades del punt.
   0,25 punts pel valor mínim de la longitud.

3. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\begin{cases} ax + y = a \\ x + ay + z = 5 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

c) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre a.
[1,25 punts]

d) Resoleu el sistema per al cas $a = 2$.
[1,25 punts]

Resolució:

a) La matriu de coeficients i l'ampliada, A i A', són les següents:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & a \\ 1 & a & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)}_{A'}$$

Mirem quan det(A) = 0 per tal que el rang no sigui màxim:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 2a = a(a-2)$$

Que s'anul·la per $a = 0$ i $a = 2$.

Així doncs tenim els següents tres casos:

- $Si\ a \neq 0\ i\ a \neq 2\ \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = rang(A') \Rightarrow SCD$

- Si $a = 0$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)}_{A'}$$

En primer lloc volem calcular el rang(A).
Com que det(A) = 0 i el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, aleshores rang(A)=2.

Ara volem calcular el rang(A'). Com que la 1a i la 3a columna són iguals, tots els menors que les continguin seran nuls. Ens queda calcular el determinant amb les altres tres columnes:

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$. Per tant, rang(A') = 2

Aleshores tenim que rang(A) = rang(A') = 2 < 3 = nº d'equacions. Per tant és un SCI amb 1 (3-2) grau de llibertat.

- Si a = 2

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ \underbrace{1 \quad 2 \quad 1}_{A} & & & 5 \end{array}\right)}_{A'}$$

En aquest cas veiem que la segona i la tercera fila, tant de la matriu A com de la matriu ampliada són iguals entre elles i diferents a la primera, per tant tenim que rang(A) = rang(A') = 2 < 3= nº d'equacions. Per tant és un SCI amb 1 (3-2) grau de llibertat.

b) S'ha de resoldre el sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y + z = 5 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

Com que la segona i la tercera equació són la mateixa, aleshores la podem eliminar i hem de resoldre el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

I serà un sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat.
Si escollint $x = \lambda$ com a paràmetre lliure, obtenim que la solució, després de substituir i aïlla a la primera equació i anàlogament a la segona, és: $\boxed{(\lambda, -2\lambda+2, 3\lambda+1)}$

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts pel plantejament
   0,25 punts pels valors crítics.
   0,75 punts per la discussió dels 3 casos (0,25 per cada cas).
b) 0,5 punts pels primers passos de substitució
   0,75 punts pels passos següents fins l'expressió de la solució.

4. Sigui la funció $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(x)$, en què ln indica el logaritme neperià, definida per a $x > 0$.

   a) Calculeu les coordenades del punt de la corba $y = f(x)$ en què la recta tangent a la corba en aquest punt és horitzontal. Estudieu si aquest punt és un extrem relatiu i classifiqueu-lo.
   [1,25 punts]

   b) Calculeu l'àrea del recinte delimitat per la corba $y = f(x)$, les rectes verticals $x = 1$ i $x = \mathrm{e}$ i l'eix de les abscisses.
   [1,25 punts]

Resolució:

a) Si la recta tangent és horitzontal (f'(x)=0), aleshores:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-lnx}{x^2}=\frac{1-lnx}{x^2} \quad\rightarrow\quad \frac{1-\ln x}{x^2}=0 \quad\rightarrow\quad 1-\ln x=0 \quad\rightarrow \ln x=1 \quad\rightarrow x=e$$

El punt demanat serà $\boxed{\left(e,\ \frac{1}{e}\right)}$

Per determinar si és un extrem relatiu podem utilitzar el criteri de la segona derivada:

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{-3+2\ln x}{x^3}$$

$f''(e)=\frac{-3+2\ln e}{e^3} \ = \frac{-1}{e^3}<0$ i per tant es tracta d'un $\boxed{\text{Màxim relatiu}}$.

b) Com que la funció *f*(*x*) és positiva per a *x* > 1, l'àrea (A) que es busca serà el resultat d'integrar:

$$A=\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx=\int_1^e \frac{1}{x}lnx\,dx=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e=\frac{(\ln e)^2}{2}-\frac{(\ln 1)^2}{2}=\boxed{\frac{1}{2}u^2}.$$

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per la funció derivada.
   0,25 punts per l'abscissa del punt singular.
   0,25 punts per les coordenades del punt.
   0,25 punts per la derivada segona.
   0,25 punts per la classificació com a màxim relatiu.

b) 0,25 punts pel plantejament de la integral.
   0,5 punts pel càlcul de la primitiva.
   0,25 punts per l'aplicació de la regla de Barrow.
   0,25 punts pel càlcul final.

5. Considereu la recta r d'equació $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{1}$ i la recta s que passa pel punt P = (2,-5,1) i que té per vector director (-1,0,-1).
   a) Estudieu la posició relativa de les rectes r i s.
   [1,25 punts]
   b) Calculeu l'equació general del pla que és paral·lel a la recta r i conté la recta s.
   [1,25 punts]

Resolució:

a) El vector director de r és $v_r = (2,-2,1)$ i un punt és $P_r = (1,3,0)$.
El vector director de s és $v_s = (-1,0,-1)$ i un punt és $P_s = (2,-5,1)$

La seva posició relativa l'obtindríem a partir de:

$$\overrightarrow{P_rP_s} = (1,-8,1) \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2+8-16-2 = -8 \neq 0$$

Per tant $\boxed{\text{les dues rectes es creuen}}$ a l'espai tridimensional.

b) El vector normal del pla serà perpendicular als vectors directors respectius de cada recta.

$$n = v_r \times v_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2i + j - 2k = (2,1,-2)$$

Com que la recta s ha d'estar continguda al pla ($P_s \in \pi$) $\rightarrow$

$$\pi: 2(x-2) + 1(y+5) - 2(z-1) = 0$$

per tant el pla serà $\boxed{\pi: 2x + y - 2z = -3}$

o també:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+5 & z-1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \boxed{2x + y - 2z + 3 = 0}$$

Pautes de correcció:

a) 0,25 per la identificació de les dues rectes.
0,25 punts pel vector que uneix les rectes.
0,25 punts pel plantejament.
0,25 punts pel càlcul del determinant.
0,25 punts per la resposta final.
Observació: Qualsevol mètode alternatiu correcte també s'avaluarà amb la totalitat de la puntuació.

b) 0,5 punts pel plantejament d'algun procediment correcte per a trobar el pla (a partir de punt i dos vectors, a partir de vector normal i punt).
0,75 punts pel càlcul de l'equació general a partir del procediment anterior.

6. Una empresa de ceràmica vol posar a la venda una rajola quadrada de 20 cm de costat pintada a dos colors, de manera que la superfície de cada color sigui la mateixa i que si es posen les rajoles l'una al costat de l'altra es vegi un dibuix continu (figura 1).

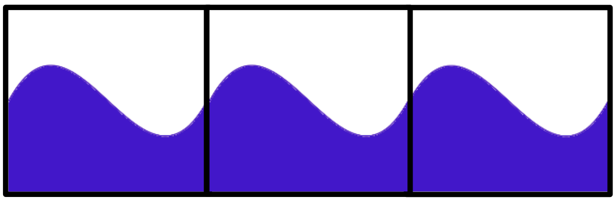


Figura 1

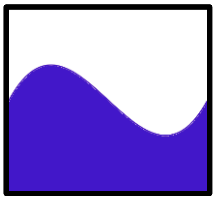


Figura 2

Per a fer-ho l'empresa utilitza en cada rajola la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ enquadrada entre els punts de coordenades (0,0), (0,2), (2,0) i (2,2), tal com mostra en la figura 2, i fa servir com a unitat de mesura el decímetre.

a) Justifiqueu que, efectivament, aquesta funció permet ajuntar les rajoles de manera contínua i derivable.
[1,25 punts]

b) Justifiqueu que aquesta funció divideix el quadrat esmentat en dues parts que tenen la mateixa superfície.
[1,25 punts]

Resolució:

a) Sabent que, pel fet de ser un polinomi, la funció *f(x)* és contínua a tota la recta real, i per tant la continuïtat gràfica de les juntes queda provada només veient que $\boxed{f(0) = 1 = f(2)}$,

De manera anàloga, *f(x)* és derivable –i amb derivada contínua- a tota la recta real i la junta serà derivable sempre que el pendent en que s'hi arribi, $f'(2)$, sigui el mateix que el pendent amb què en sortim, $f'(0)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

$$\lim_{x \to 2^-} f'(x) = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 2 = \boxed{2}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \boxed{2}$$

b) Per a comprovar que les àrees són idèntiques cal utilitzar la integral definida:

$$\int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 2x + 1)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + x\right]_0^2 = \frac{1}{4}2^4 - 2^3 + 2^2 + 2 = 2\ dm^2$$

com que l'àrea de la rajola és $A = 2 \cdot 2 = 4\ dm^2$ queda clar que la funció la divideix en dues parts d'igual superfície.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per la continuïtat de f.
   0,25 punts per la prova de la continuïtat de les juntes.
   0,25 punts per la derivabilitat de f.
   0,5 punts per la prova de la derivabilitat de les juntes.

b) 0,25 punts pel platejament de la integral
   0,25 punts pel càlcul de la primitiva.
   0,25 punts per la regla de Barrow.
   0,25 punts pel càlcul final de la integral.
   0,25 punts per la comprovació final.
   Observació: També es donarà per bó qualsevol justificació basada en la simetria de la funció a cada rajola respecte del centre de la rajola (per exemple comprovant que f(1-x)=2-f(1+x) o que f(1-x)+f(1+x)=2). En aquest cas no seria necessari utilitzar el concepte (ni el càlcul) d'integral.